

## VIII. Grawitacja

VIII.1. Jaki promień  $R_p$  powinna mieć planeta o masie równej masie Ziemi  $M$ , aby przyspieszenie grawitacyjne przy jej powierzchni było  $n$  razy większe od ziemskiego? Promień Ziemi jest  $R$ , stała grawitacji jest  $G$ .

VIII.2. Jaką prędkość końcową  $v_K$  osiągnie ciało spadając na powierzchnię Ziemi z wysokości  $h=9R$ , gdzie  $R$  jest promieniem Ziemi. Masa Ziemi jest  $M$ .

VIII.3. Dwie kule o równych masach  $m_1=m_2=m$  i równych promieniach  $r_1=r_2=r$  przyciągają się grawitacyjnie. W chwili początkowej kule spoczywają, ich środki są odległe o  $x=12r$ . Wyznaczyć prędkości obu kul  $v_1$  i  $v_2$  w chwili zderzenia.

VIII.4. Wyznaczyć prędkość  $v$  satelity krążącego po orbicie kołowej na wysokości  $h=0.5R$  nad powierzchnią planety o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Wyznaczyć okres obiegu  $T$  satelity.

VIII.5. Znaleźć odległość od środka Ziemi punktu, w którym a) siły grawitacji Ziemi i Księżyca równoważą się b) środka masy układu Ziemia-Księżyc c) znaleźć różnicę tych odległości.

Używamy jednostki długości  $r$  i masy  $m$ . Masa Księżyca  $M_K=7m$ , masa Ziemi  $M_Z=598m$ , promień Księżyca  $R_K=174r$ , promień Ziemi  $R_Z=637r$ , odległość Ziemia-Księżyc  $x=38200r$ .

VIII.6. Wykazać słuszność (trzeciego) prawa Keplera dla planety krążącej po orbicie kołowej o promieniu  $r$  wokół gwiazdy o masie  $M$  tzn. pokazać, że kwadrat okresu obiegu planety

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

VIII.7. Jakie są współrzędne  $\vec{r}_M = [x_M, y_M, z_M]$  masy  $M$  jeśli na masę  $m$  umieszczoną w punkcie  $\vec{r}_m = [1, 1, 2]$  działa siła przyciągania grawitacyjnego  $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^3} [3, 4, 0]$ , gdzie

$$r=5 \text{ ?}$$

VIII.8. Znaleźć prędkość kosmiczną ucieczki z powierzchni Ziemi. Promień Ziemi jest  $R$ , masa Ziemi jest  $M$ .

VIII.9. Wykaż, że na orbicie eliptycznej prędkość planety spełnia  $v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$ , gdzie  $M$  jest masą gwiazdy,  $a$  wielką półosią elipsy, zaś  $r$  to chwilowa odległość planeta-gwiazda.

Należy skorzystać z faktu, że całkowita energia planety wynosi  $E = \frac{-GMm}{2a}$ .

VIII.10. W jakiej odległości  $x$  od siebie spoczywały początkowo obiekty kuliste o tej samej masie  $M$  i promieniu  $R$ , jeśli w chwili zderzenia, wywołanego przyciąganiem grawitacyjnym, miały prędkość  $v$ ?

VIII.11. Obserwator znajdujący się w początku układu współrzędnych stwierdza, że siły przyciągania grawitacyjnego pochodzące od trzech obiektów masywnych znoszą się tzn. znajduje się on w stanie nieważkości. Obserwator, znając prawa fizyki, stwierdził, że zarówno on jak i trzy masy znajdują się w jednej płaszczyźnie. Obserwator zmierzył kąty obserwowanych mas jako  $0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < 2\pi$  a następnie wyliczył, że siły przyciągania  $F_1:F_2:F_3$  mają się do siebie jak sinusy odpowiednich różnic kątów  $\sin(\phi_3 - \phi_2) : \sin(\phi_1 - \phi_3) : \sin(\phi_2 - \phi_1)$ . Należy sprawdzić na przykładzie  $\phi_1=10^\circ$ ,  $\phi_2=130^\circ$ ,  $\phi_3=250^\circ$  przewidywania obserwatora. W jakim stosunku  $m_1:m_2:m_3$  pozostają masy, jeśli odpowiednie odległości  $r_1:r_2:r_3$  mają się jak  $1:2:3$ ?